МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Белгородский Государственный Технологический Университет им. В.Г. Шухова»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

ИИТУС

Кафедра Технической Кибернетики

Лабораторная работа № 1

дисциплина: «Численные методы и оптимизация»

«Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений»

Вариант № 1

Выполнил:
студент группы АП-21
Крюков А.В.

Принял:
ст. преподават. каф. ТК
Крюков А.В.

Белгород, 20011

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методом:

1) дихотомии,
2) хорд,
3) касательных,
4) комбинированным,
5) итераций

вычислить с точностью 10^{-3} корни уравнения: $\mathbf{5x^5-5x^3+x+0,05=0}$.

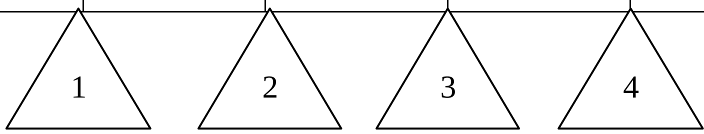
2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

<u>Этап 1.</u> Отделение корней.
Алгебраический способ отделения корней алгебраического уравнения
$5x^5-5x^3+x+0,05=0$
Рассмотрим функцию **$f(x) = 5x^5-5x^3+x+0,05=0$.**
Эта функция определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой прямой.
$f'(x) = 25*x^4-15x^2+1=0$, $x^2=t$,
$25t^2-15t+1=0$ D=125 ,
$t_1=(15+125^{1/2})/50\approx0,523$ $t_2=(15-11,18)/50\approx0,076$,
$x_{1=}0,723$ $x_{2=}-0,723$ $x_{3=}0,275$ $x_{4=}-0,275$.

Распределение знаков функции видно из таблицы:

Таблица 1.

x	$-\infty$	-0,723	-0,275	0,275	0,723	$+\infty$
Sign f(x)	+	+	-	+	-	+



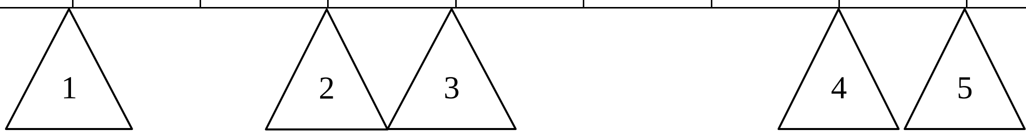
Следовательно, функция f(x) имеет 4 перемены знака $\Rightarrow$ уравнение f(x)=0 имеет 4 действительных корня.

Определение точки перегиба:
$f''(x)=100x^3-30x=0$,
$10x(10x^2-3)=0$,
$x_5=0$ $x_6\approx-0,547$ $x_7\approx0,547$.

Итак, определив знаки функции **$f(x)=5x^5-5x^3+x+0,05$ в** ряде точек, получаем уточненный вариант таблицы знаков с конкретизацией границ:

Таблица 2.

X	-1	-0,723	-0,547	-0,275	0	0,275	0,547	0,723	1
sign f(x)	-	+	+	-	+	+	+	-	+



<u>Вывод:</u>
$\xi_1\in[-1; -0,723]$;
$\xi_2\in[-0,547; -0,275]$;
$\xi_3\in[-0,275;0]$;
$\xi_4\in[0,547; 0,723]$;
$\xi_5\in[0,723; 1]$.

<u>Этап 2.</u> Уточнение корней.

Процесс уточнения корней осуществляется различными методами.

Рассмотрим, например, уточнение корня $\xi_3 \in$[-0,275; 0] алгебраического уравнения **$5x^5$-$5x^3$+x+0,05=0.**

<u>Метод дихотомии</u> (половинного деления)

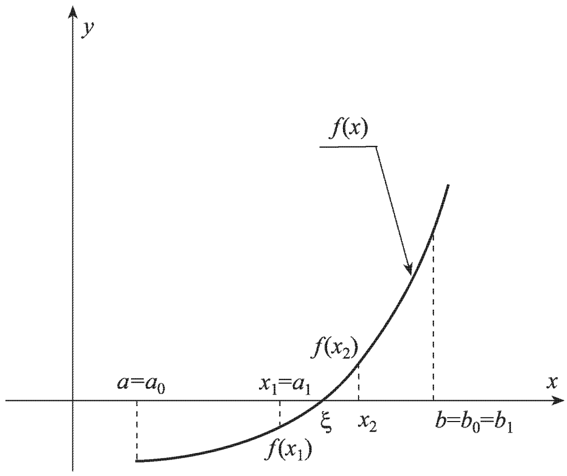


Рис. 1. К методу половинного деления

Запишем весь этап уточнения корня $\xi_3 \in$[-0,275; 0] в виде таблицы:

Таблица 3.

Итерационный процесс уточнения корня методом дихотомии

n	a	b	$x_{ср}$	f(a)	f($x_{ср}$)	Точность
0	-0,2750	0	-0,1375	-0,1289	-0,0747	0,2750
1	-0,1375	0	-0,0688	-0,0747	-0,0171	0,1375
2	-0,0688	0	-0,0344	-0,0171	0,0158	0,0688
3	-0,0688	-0,0344	-0,0516	-0,0171	-0,0009	0,0344
4	-0,0516	-0,0344	-0,0430	-0,0009	0,0074	0,0172
5	-0,0516	-0,0430	-0,0473	-0,0009	0,0033	0,0086
6	-0,0516	-0,0473	-0,0494	-0,0009	0,0012	0,0043
7	-0,0516	-0,0494	-0,0505	-0,0009	0,0002	0,0021
8	-0,0516	-0,0505	-0,0510	-0,0009	-0,0004	0,0011
9	-0,0510	-0,0505	**-0,0508**	-0,0004	-0,0001	**0,0005**

$|a_9 - b_9| = |-0,0510 + 0,0505| = 0,0005 < 0,001 = \varepsilon.$

$\xi_3 \approx -0,051.$

<u>Метод хорд</u> *(пропорциональных частей)*

$\boldsymbol{f(x) = 5x^5 - 5x^3 + x + 0{,}05,}$

$\boldsymbol{f''(x) = 100x^3 - 30x.}$

Выбор начального приближения : в качестве x_0 выбирается тот конец $[a,b]$, для которого:

$$f(x_0)\ f''(x_0) < 0.$$

В данном случае $x_0 = a = -0{,}275$, *так как* $f(a)f''(a) < 0$.

Тогда получаем, что

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n);$$

$b = 0$; $f(b) = 0{,}05$.

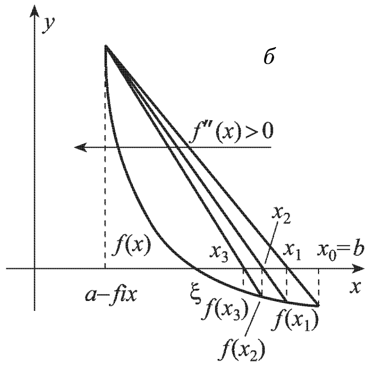


Рис. 2. К методу хорд

Запишем весь этап уточнения корня $\xi_3 \in [-0{,}252; 0]$ в виде таблицы:

Таблица 4.

Итерационный процесс уточнения корня методом хорд

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} * (b - x_n)$	точность
0	-0,2750	-0,0769	0,1981
1	-0,0769	-0,0515	0,0254
2	-0,0515	**-0,0507**	**0,0008**

$\boldsymbol{|x_3 - x_2| = |-0{,}0507 + 0{,}0515| = 0.0008 < 0.001 = \varepsilon.}$

$\boldsymbol{\xi_3 \approx -0{,}051.}$

<u>Метод касательных</u> *(Ньютона)*

$f(x)$ **= 5x^5-5x^3+x+0,05,**
$f''(x)$ **=100x^3-30x.**

Выбор начального приближения: в качестве x_0 выбирается тот конец $[a,b]$, для которого

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0.$$

В данном случае $x_0=b=0$ так как именно в этом случае $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0.$
Тогда

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

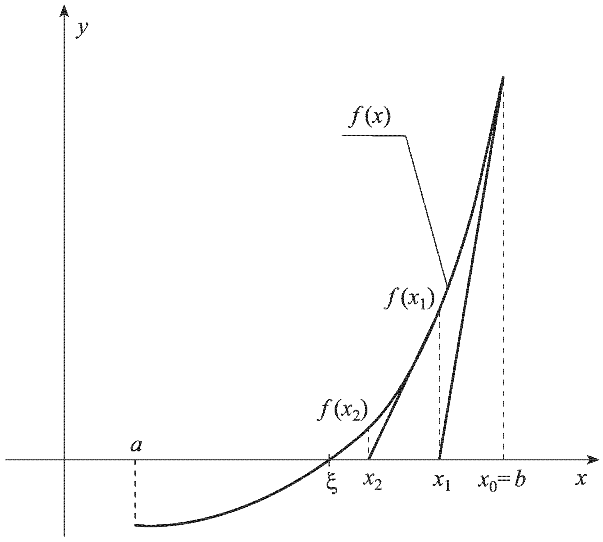


Рис. 3. К методу Ньютона

Запишем весь этап уточнения корня $\xi_3\in[-0,252;\ 0]$ в виде таблицы:

Таблица 5.

Итерационный процесс уточнения корня методом Ньютона

n	x_n	$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f`(x_n)}$	точность
0	0,0000	-0,0500	0,0500
1	-0,0500	**-0,0506**	**0,0006**

$|x_2-x_1|$ **= |-0,0506 + 0,05| = 0.0006< 0.001=** ε**.**
$\xi_3\approx$ **-0,051 .**

<u>Упрощенный метод касательных</u> *(Ньютона)*

$\boldsymbol{f(x) = 5x^5-5x^3+x+0{,}05,}$
$\mathbf{f'(x) = 25*x^4-15x^2+1=0,}$
$\boldsymbol{f''(x) = 100x^3-30x.}$

Выбор начального приближения: в качестве x_0 выбирается тот конец $[a,b]$, для которого

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0.$$

В данном случае $x_0=b=0$ так как именно в этом случае $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0.$
Тогда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_0)}, \quad f`(x_0) = 1$$

Таблица 6.

Итерационный процесс уточнения корня упрощенным методом Ньютона

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_0)}$	**точность**
0	-0,2750	-0,1461	0,1289
1	-0,1461	-0,0653	0,0809
2	-0,0653	-0,0514	0,0139
3	-0,0514	**-0,0507**	**0,0007**

$|x_4 - x_3|$ = **|-0,0507 + 0,0514| = 0.0007< 0.001=** $\boldsymbol{\varepsilon}$**.**
$\boldsymbol{\xi_3 \approx}$ **-0,051 .**

<u>Комбинированный метод</u> *(хорд и касательных)*

Метод хорд и метод касательных дают приближения к корню с разных сторон. Совместное использование методов позволяет на каждой итерации находить приближенные значения с недостатком и с избытком, что ускоряет процесс сходимости.

$f(x)$ $=5x^5-5x^3+x+0{,}05=0$,

$$\bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n),$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Таблица 7.

Итерационный процесс уточнения корня комбинированным методом

n	x_n / $\bar{x}_n$	$\bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_n)}$	**точность**
0	0 -0,2750	-0,1204	-0,0500	0,2750
1	-0,0500 -0,1204	-0,0508	-0,0506	0,0704
2	-0,0506 -0,0508	-0,0506	-0,0506	0,0001
3	**-0,0506** -0,0506	-0,0506	-0,0506	**0**

$\left| \bar{x}_4 - x_4 \right| = \left| -0{,}0506 + 0{,}0506 \right| = 0 < 0.001 = \varepsilon$.

$\xi_3 \approx -0.051$.

Метод итераций

Предварительно необходимо преобразовать уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$. В качестве начального приближения x_0 выбирается любая точка интервала $[a,b]$.

$\boldsymbol{f(x) = 5x^5-5x^3+x+0,05}$,
$\boldsymbol{\xi_3 \in [-0,0275; 0]}$.

Преобразуем исходное уравнение к виду: $\mathbf{x= -5x^5+5x^3-0,05}$
Докажем, что оно удовлетворяет достаточному условию сходимости итерационного процесса:

$\boldsymbol{\varphi(x)= -5x^5+5x^3-0,05}$
$\boldsymbol{\varphi'(x)= -25x^4+15x^2}$
$\boldsymbol{|\varphi'(x)| = |-25x^4+15x^2| < 1}$ ***при –0,0275 ≤ x <0 (см. рис.)***
Условие сходимости выполнено.

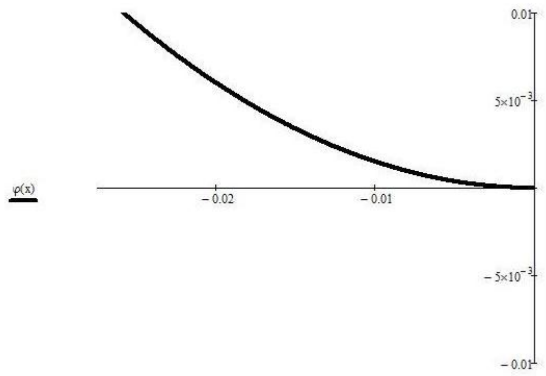


Рис. 1. График производной

Следовательно, $\mathbf{x=-5x^5+5x^3-0,05}$

Таблица 8.

Процесс уточнения корня методом итераций

n	x_n	f(x_n)	точность
0	-0,2750	-0,1461	0,1289
1	-0,1461	-0,0653	0,0809
2	-0,0653	-0,0514	0,0139
3	-0,0514	**-0,0507**	**0,0007**

$|x_5 - x_4| = |-0.0507 + 0.0514| = 0.0007 < 0.001 = \varepsilon$.
$\xi_3 \approx -0.051$.

3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

3.1. Блок-схемы основных вычислительных процессов

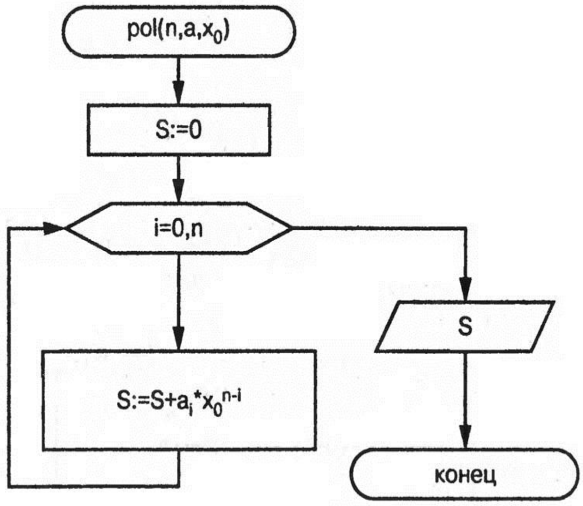


Рис. 2. Блок-схема вычисления значения функции в точке

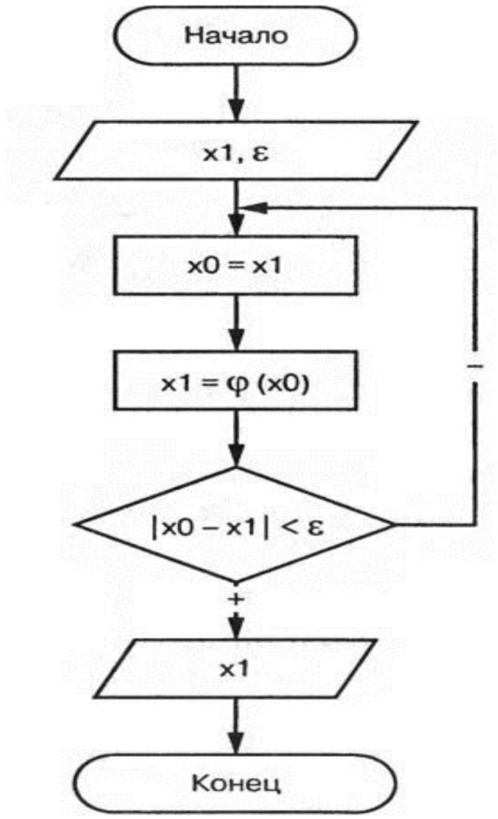


Рис. 3. Блок-схема нахождения корня методом итераций

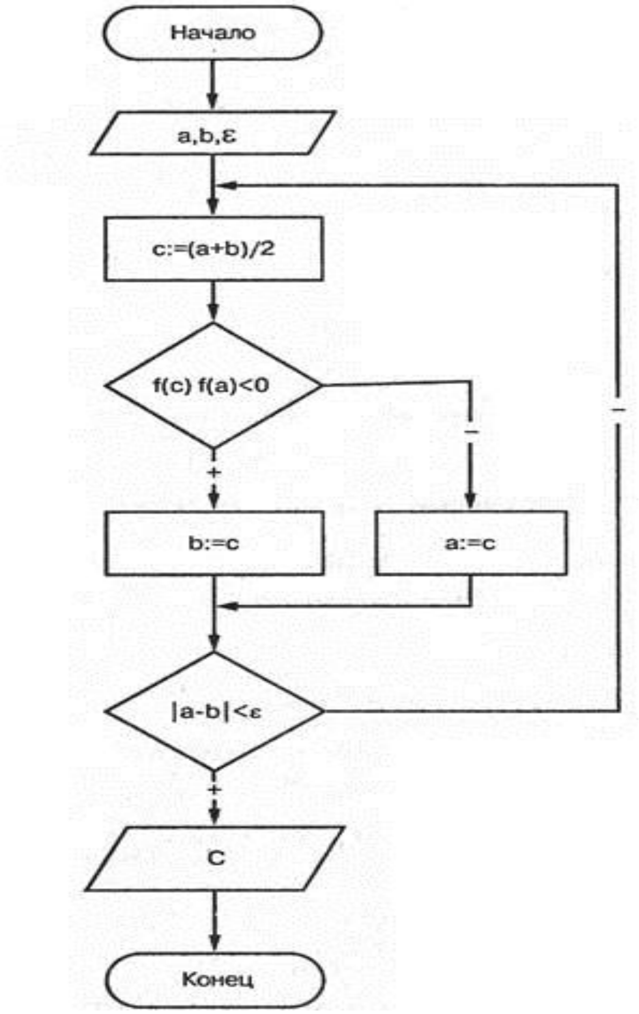


Рис. 4. Блок-схема нахождения корня методом дихотомии

3.2. Описание процедур и функций

При написании программы широко применялось использование подпрограмм, а так же таких типов данных как массивы. Программный комплекс позволяет выполнить следующие функции:

Решение уравнение методом половинного деления,

Решение уравнение методом итераций.

Программный комплекс состоит из основной программы и нескольких подпрограмм.

Основная программа осуществляет выбор метода решения, выполняет переход к подпрограмме, реализующую выбранную функцию.

Ниже приведено описание основных процедур и функций, используемых в рассматриваемой программе. В них реализованы те идеи и те методы, которые применяются для решения алгебраических и трансцендентных уравнений численными методами.

1)Функция вычисления значения полинома (алгебраической функции) в любой точке x, реализована в виде подпрограммы Pol. Для вычисления значения полинома должны быть определены степень n=5, его коэффициенты и точка x0. Это будут параметры функции. Коэффициенты представляют собой массив действительных чисел. Чтобы описать формальный параметр-массив, нужно определить в программе тип-массив.

```
type Tmas=array [0..5] of real;
var mas:Tmas;
```

Подпрограмма будет работать только для полинома пятой или менее степени.

Входные параметры:

mas – массив коэффициентов алгебраической функции;

x0 – точка, в которой ищется значение функции.

Выходные параметры:

Pol – искомое значение полинома в точке x.

Обращение: Pol(x0, mas);

2) Функция вычисления значения производной в любой точке x, реализована в подпрограмме Proiz. Для вычисления значения производной в точке должны быть определены максимальная степень полинома n=5 и коэффициенты полинома, передаваемые в виде массива. Массив передавать в процедуру не надо, т.к. он остается тем же что и в основной процедуре. Подпрограмма также работает только для полинома пятой степени.

Входные параметры: x0 точка в которой ищется значение производной

Выходные параметры: Proiz.

Обращение: Proiz(x);

3) Процедура нахождения корня функции на интервале изоляции методом дихотомии реализована в подпрограмме Detoh. Для вычисления должны быть определены интервалы изоляции корня a- левая граница, b- правая граница, коэффициенты полинома.

Входные параметры: a, b левая и правая границы интервала изоляции, mas – массив коэффициентов полинома.

Выходные параметры: c- значение корня на интервале изоляции

Обращение: Detoh(a,b,x,mas);

4) Процедура нахождения корня функции на интервале изоляции методом итераций реализована в подпрограмме Itteracia. Для вычисления должны быть определены так же границы интервала изоляции и массив с коэффициентами.

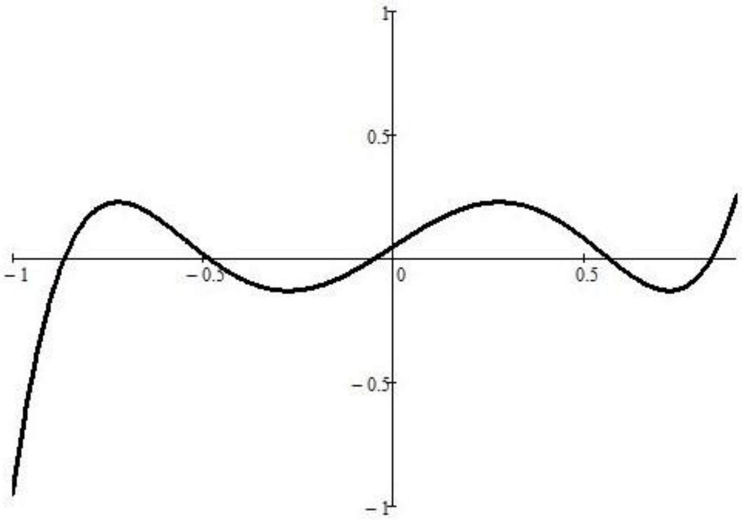
Входные параметры: a, b левая и правая границы интервала изоляции, mas – массив коэффициентов полинома.

Выходные параметры: c- значение коня на интервале изоляции

Обращение: Itteracia(a,b,x,mas).

4. Использование MathCad для решения уравнения

$f(x) := 5 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3 + x + 0.05$



$$\mathrm{dixot}(a,b,e) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \dfrac{(a+b)}{2} \\ b \leftarrow c \ \text{ if } f(c) \cdot f(a) < 0 \\ a \leftarrow c \ \text{ otherwise} \\ k \leftarrow k+1 \\ \text{break if } |a-b| < e \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{dixot}(-1,-0.7,0.001) = \begin{pmatrix} -0.865 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{dixot}(-0.3,0,0.001) = \begin{pmatrix} -0.051 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{dixot}(0.7,1,0.001) = \begin{pmatrix} 0.834 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{dixot}(-0.5,-0.4,0.001) = \begin{pmatrix} -0.484 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{dixot}(0.5,0.6,0.001) = \begin{pmatrix} 0.566 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\text{iter}(a,b,e) := \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow \frac{a+b}{2} \\ max1 \leftarrow \max(f1(a), f1(b)) \ \text{ if } \ f1(a) > 0 \\ max1 \leftarrow \min(f1(a), f1(b)) \ \text{ if } \ f1(a) < 0 \\ \lambda \leftarrow \frac{1}{max1} \\ \phi(x) \leftarrow x - \lambda \cdot f(x) \\ k \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow \phi(x0) \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } \ |x0 - x1| < e \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} x1 \\ k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\text{iter}(-0.2, 0, 0.001) = \begin{pmatrix} -0.051 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iter}(0.8, 1, 0.001) = \begin{pmatrix} 0.836 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{iter}(-0.5, -0.4, 0.001) = \begin{pmatrix} -0.484 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iter}(0.5, 0.6, 0.001) = \begin{pmatrix} 0.566 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iter}(-1, -0.8, 0.001) = \begin{pmatrix} -0.866 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{VectT} := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(\text{VectT}) = \begin{pmatrix} -0.865 \\ -0.484 \\ -0.051 \\ 0.566 \\ 0.834 \end{pmatrix}$$

$$\text{iter}(0.5, 0.6, 0.001) = \begin{pmatrix} 0.566 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iter}(-1, -0.8, 0.001) = \begin{pmatrix} -0.866 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$t1 := -0.8$

$\text{root}(f(t1), t1) = -0.865$

$t2 := -0.5$
$\text{root}(f(t2), t2) = -0.484$

$t3 := -0.1$
$\text{root}(f(t3), t3) = -0.051$

$t4 := 0.6$

$\text{root}(f(t4), t4) = 0.566$

$t5 := 0.9$

$\text{root}(f(t5), t5) = 0.834$

5. Результаты выполнения работы. Основные выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы было решено данное алгебраическое уравнение 5-ой степени при помощи различных численных методов. При проведении непосредственных расчетов и программной реализации отдельных методов решения были выделены их основные достоинства и недостатки. Так, например, метод дихотомии достаточно прост в алгоритмизации и программирования; кроме того, на саму функцию f(x) не накладывается никаких ограничений кроме условия непрерывности на интервале изоляции корня. Однако данный метод медленно сходится, т.е. необходимо использовать большое число итераций для достижения заданной точности.

Также в работе было показано использование математического пакета MathCad при решении данной задачи. Причем такое решение в данной среде может происходит при помощи встроенных функций, так и при помощи программной реализации численных алгоритмов.

Все рассмотренные методы решения уравнений являлись итерационными и позволяли находить решения уравнения с наперед заданной точностью с различным числом шагов итераций.

Приложение 1

Текст программы

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls, XPMan, Buttons, TeeProcs, TeEngine, Chart,
  Series, jpeg, TeeFunci;

…
```

Руководство пользователя

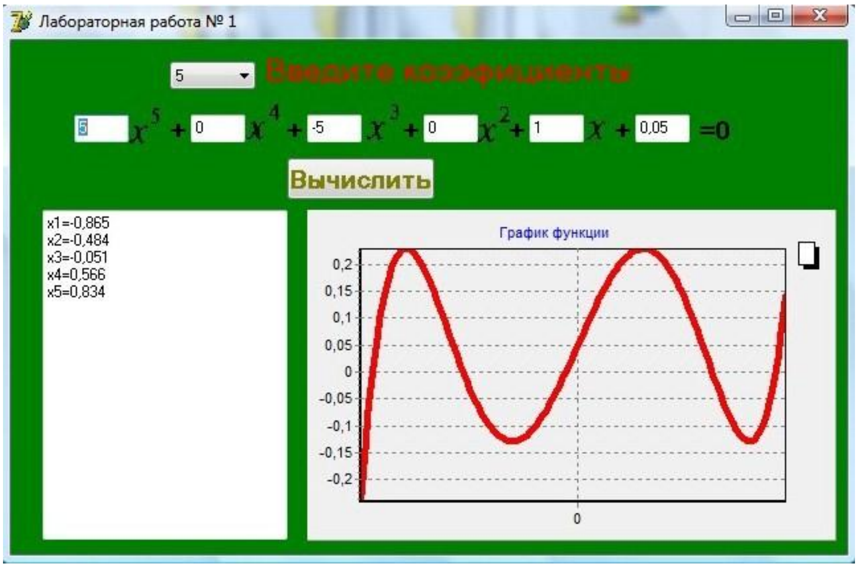


Рис. 9. Общий вид программы

При запуске программы (рис. 9) пользователю предоставляется выбор максимальной степени уравнения, всех коэффициентов, а также выбор метода решения в программе. Программа находит все действительные корни полинома, а так же строит график его функции.